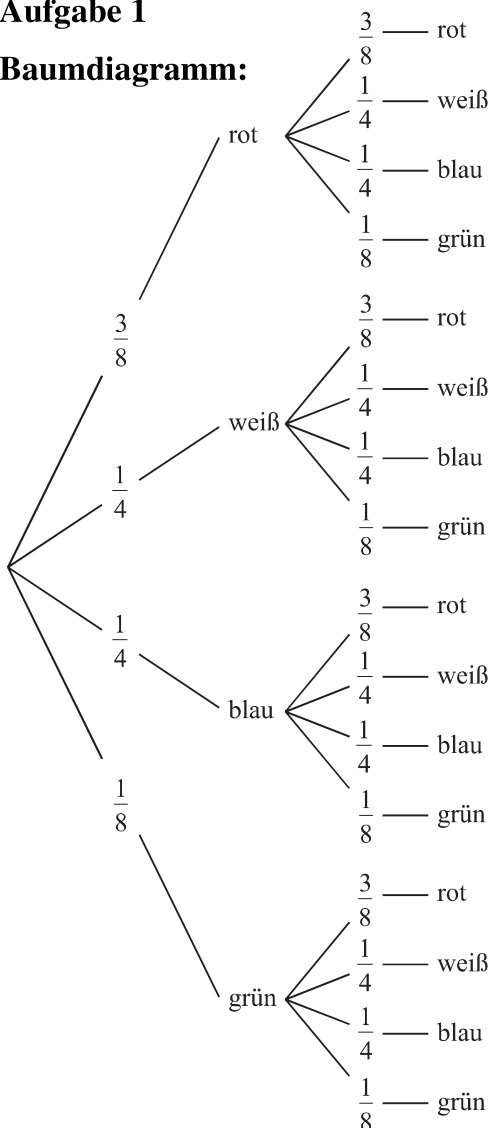


Übungsaufgaben: Wahrscheinlichkeit
Ausführlich dargestellte Lösungswege zu allen Aufgaben des Kapitels

Aufgabe 1

Baumdiagramm:



Berechnung der Wahrscheinlichkeit, keine rote Kugel zu ziehen:

$$P(\text{keine rote Kugel}) = P(w; \bar{r}) + P(b; \bar{r}) + P(g; \bar{r})$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{8}$$

$$= \frac{5}{32} + \frac{5}{32} + \frac{5}{64}$$

$$= \frac{10+10+5}{64}$$

$$P(\text{keine rote Kugel}) = \frac{25}{64} = 39,06 \%$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, keine rote Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{25}{64}$ bzw. 39,06 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, eine weiße und eine rote Kugel zu ziehen:

$$P(E) = P(r; w) + P(w; r)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{3}{32}$$

$$P(E) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} = \underline{\underline{18,75\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße und eine rote Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{3}{16}$ bzw. 18,75%.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen:

$$P(E) = P(r; b) + P(w; b) + P(b; r) + P(b; w) + P(b; b) + P(b; g) + P(g; b)$$

Alternativ:

*Lösungsweg über
Gegeneignis*

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{32}$$

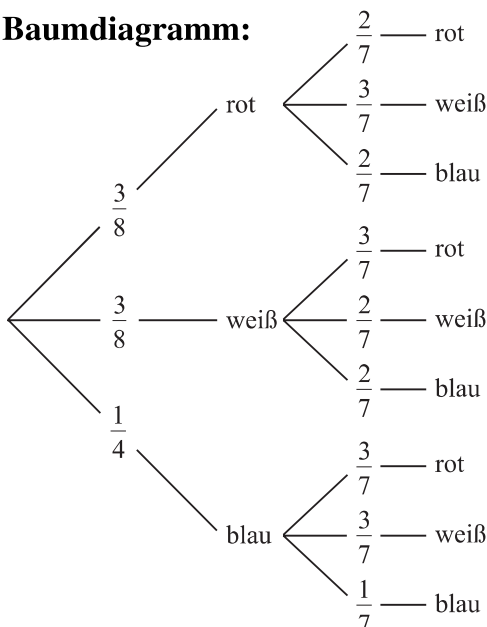
$$= \frac{3+2+8+1}{32}$$

$$P(E) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16} = \underline{\underline{43,75\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{7}{16}$ bzw. 43,75%.

Aufgabe 2

Baumdiagramm:



Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass keine Kugel rot ist:

$$\begin{aligned}
 P(\bar{E}) &= P(w; \bar{r}) + P(b; \bar{r}) \\
 &= \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} \\
 &= \frac{3}{14} + \frac{1}{7} \\
 &= \frac{3+2}{14}
 \end{aligned}$$

$$P(\bar{E}) = \frac{5}{14} = \underline{\underline{35,71\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Kugel rot ist, beträgt $\frac{5}{14}$ bzw. 35,71 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß oder blau ist:

$$\begin{aligned}
 P(E) &= 1 - P(\bar{E}) \\
 &= 1 - P(r; r) \\
 &= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} \\
 &= 1 - \frac{3}{28}
 \end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{25}{28} = \underline{\underline{89,29\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß oder blau ist, beträgt $\frac{25}{28}$ bzw. 89,29 %.

Berechnung, zu welcher Ziehung die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{28}$ passt:

$$\frac{1}{28} = P(?)$$

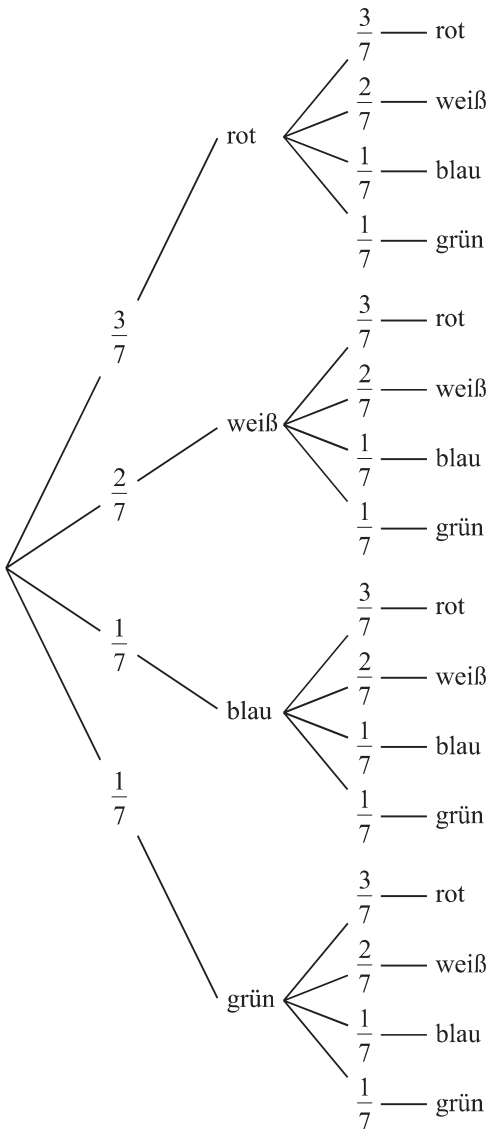
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = P(?)$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \underline{\underline{P(b; b)}}$$

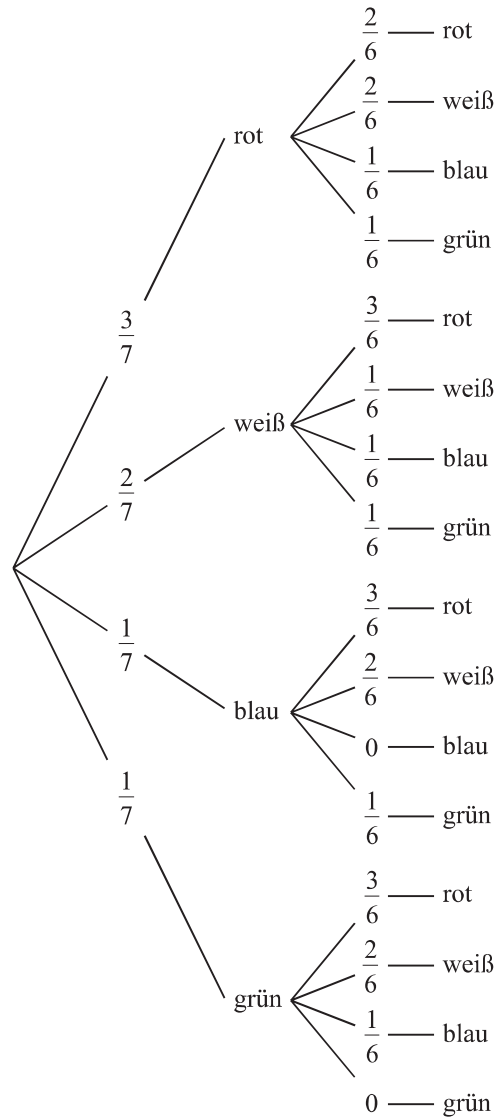
A: Zur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{28}$ passt die Ziehung „zwei blaue Kugeln“.

Aufgabe 3

Baumdiagramm: mit Zurücklegen



Baumdiagramm: ohne Zurücklegen



Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen für den Fall „mit Zurücklegen“:

$$P(E) = P(r; r) + P(w; w) + P(b; b) + P(g; g)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$$

$$= \frac{9}{49} + \frac{4}{49} + \frac{1}{49} + \frac{1}{49}$$

$$P(E) = \frac{15}{49} = \underline{\underline{30,61\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung mit Zurücklegen zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, beträgt $\frac{15}{49}$ bzw. 30,61 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen für den Fall „ohne Zurücklegen“:

$$P(E) = P(r; r) + P(w; w) + P(b; b) + P(g; g)$$

$$= \frac{\cancel{3}^1}{7} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{6}_{2,1}} + \frac{\cancel{2}^1}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_3} + \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{1}{7} \cdot 0$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + 0 + 0$$

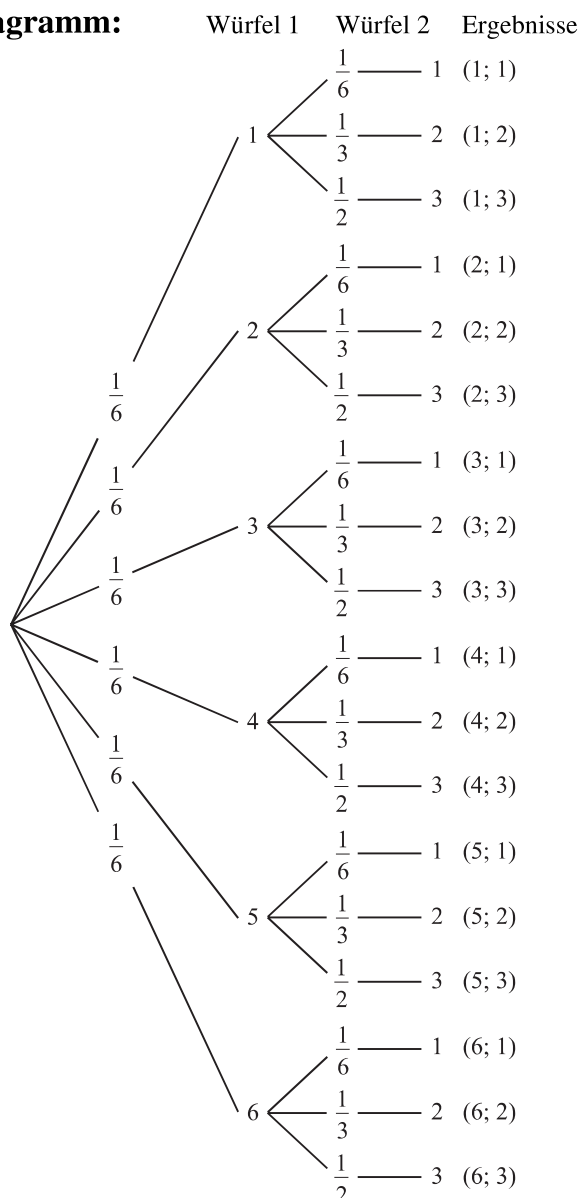
$$= \frac{3+1}{21}$$

$$P(E) = \frac{4}{21} = \underline{\underline{19,05\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung ohne Zurücklegen zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, beträgt $\frac{4}{21}$ bzw. 19,05 %.

Aufgabe 4

Baumdiagramm:



Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche Zahlen zu würfeln:

$$P(\text{zwei gleiche Zahlen}) = P(1; 1) + P(2; 2) + P(3; 3)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1+2+3}{36}$$

$$= \frac{6}{36}$$

$$P(\text{zwei gleiche Zahlen}) = \frac{1}{6} = \underline{\underline{16,67\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche Zahlen zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$ bzw. 16,67 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Eins zu würfeln:

$$P(\text{mindestens eine Eins}) = P(1; 1) + P(1; 2) + P(1; 3) + P(2; 1) + P(3; 1) + P(4; 1) + P(5; 1) + P(6; 1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + 5 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1+2+3}{6} \right) + \frac{5}{36}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{36}$$

$$= \frac{6+5}{36}$$

$$P(\text{mindestens eine Eins}) = \frac{11}{36} = \underline{\underline{30,56\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Eins zu würfeln, beträgt $\frac{11}{36}$ bzw. 30,56 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, genau einmal die Eins zu würfeln:

$$P(\text{genau eine Eins}) = P(1; \bar{X}) + P(\bar{X}; 1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$$

$$= \frac{10}{36}$$

$$P(\text{genau eine Eins}) = \frac{5}{18} = \underline{\underline{27,78\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, genau einmal die Eins zu würfeln, beträgt $\frac{5}{18}$ bzw. 27,78 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, keine Eins zu würfeln:

$$P(\text{keine Eins}) = P(\bar{X}; \bar{X})$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

$$P(\text{keine Eins}) = \frac{25}{36} = \underline{\underline{69,44\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, keine Eins zu würfeln, beträgt $\frac{25}{36}$ bzw. 69,44 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zweimal die Eins zu würfeln:

$$P(\text{zweimal die Eins}) = P(1; 1)$$

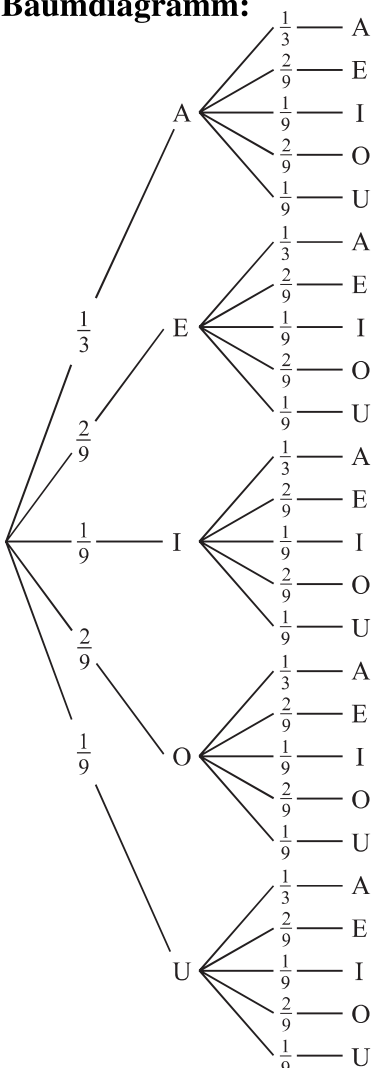
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(\text{zweimal die Eins}) = \frac{1}{36} = \underline{\underline{2,78\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, zweimal die Eins zu würfeln, beträgt $\frac{1}{36}$ bzw. 2,78 %.

Aufgabe 5

Baumdiagramm:



Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der das Rad zweimal hintereinander auf dem gleichen Vokal stehen bleibt:

$$P(\text{Ereignis}) = P(A; A) + P(E; E) + P(I; I) + P(O; O) + P(U; U)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81}$$

$$= \frac{9 + 4 + 1 + 4 + 1}{81}$$

Hinweis: Um Verwechslungen mit dem Vokal E aus der Aufgabe auszuschließen, wird Ereignis in dieser Aufgabe nicht wie üblich mit E abgekürzt, sondern ausgeschrieben.

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{19}{81} = \underline{\underline{23,46\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Rad zweimal hintereinander auf dem gleichen Vokal stehen bleibt, beträgt $\frac{19}{81}$ bzw. 23,46 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der das Rad einmal auf O und einmal auf U stehen bleibt:

$$P(\text{Ereignis}) = P(O; U) + P(U; O)$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9}$$

$$= \frac{2}{81} + \frac{2}{81}$$

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{4}{81} = \underline{\underline{4,94\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Rad einmal auf O und einmal auf U stehen bleibt, beträgt $\frac{4}{81}$ bzw. 4,94 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Wort „AU“:

$$P(A; U) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}$$

$$P(A; U) = \frac{1}{27} = \underline{\underline{3,70\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort „AU“ „geschrieben“ wird, beträgt $\frac{1}{27}$ bzw. 3,70 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Wort „EI“:

$$P(E; I) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

$$P(E; I) = \frac{2}{81} = \underline{\underline{2,47\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort „EI“ „geschrieben“ wird, beträgt $\frac{2}{81}$ bzw. 2,47 %.

Vergleich der Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Faktor} = P(A; U) : P(E; I)$$

$$= \frac{1}{27} : \frac{2}{81}$$

$$= \frac{1}{\cancel{27}_1} \cdot \frac{\cancel{81}^3}{2}$$

$$\text{Faktor} = \frac{3}{2} = 1,5$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „AU“ zu drehen, ist 1,5-mal höher als die Wahrscheinlichkeit, das Wort „EI“ zu drehen.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der das Rad nicht auf A stehen bleibt:

$$P(\text{Rad bleibt nicht auf A stehen}) = P(E; \cancel{A}) + P(I; \cancel{A}) + P(O; \cancel{A}) + P(U; \cancel{A})$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{27} + \frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27}$$

$$P(\text{Rad bleibt nicht auf A stehen}) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} = \underline{\underline{44,44\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Rad nicht auf dem Buchstaben A stehen bleibt, beträgt $\frac{4}{9}$ bzw. 44,44 %.

Aufgabe 6

Ergebnismenge:

	1	2	3	4	5	6	7
1	<input type="text"/>	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
2	(2; 1)	<input type="text"/>	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
3	(3; 1)	(3; 2)	<input type="text"/>	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	<input type="text"/>	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	<input type="text"/>	(5; 6)	(5; 7)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	<input type="text"/>	(6; 7)
7	(7; 1)	(7; 2)	(7; 3)	(7; 4)	(7; 5)	(7; 6)	<input type="text"/>

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, Augensumme 8 zu ziehen:

$$P(\text{Augensumme } 8) = \frac{6}{42}$$

$$P(\text{Augensumme } 8) = \frac{1}{7} = \underline{\underline{14,29\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 8 zu ziehen, beträgt $\frac{1}{7}$ bzw. 14,29 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme höchstens 4 beträgt:

$$P(\text{Augensumme} \leq 4) = \frac{4}{42}$$

$$P(\text{Augensumme} \leq 4) = \frac{2}{21} = \underline{\underline{9,52\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Augensumme höchstens 4 beträgt, liegt bei $\frac{2}{21}$ bzw. 9,52 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zuerst eine Zahl kleiner als 4, dann eine Zahl größer als 4 zu ziehen:

$$P(E) = P(\text{Zahl } 1 < 4; \text{Zahl } 2 > 4)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6_2}$$

Hinweis: Angegeben ist der Lösungsweg über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Alternativ: Lösungsweg über Tabelle

$$P(E) = \frac{3}{14} = \underline{\underline{21,43\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine Kugel mit einer Zahl kleiner als 4, dann eine Kugel mit einer Zahl größer als 4 zu ziehen, beträgt $\frac{3}{14}$ bzw. 21,43 %.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, bei beliebiger Reihenfolge eine Zahl kleiner als 4 und eine Zahl größer als 4 zu ziehen:

$$P(E) = P(\text{Zahl } 1 < 4; \text{Zahl } 2 > 4) + P(\text{Zahl } 1 > 4; \text{Zahl } 2 < 4)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6_2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6_2}$$

$$= \frac{3}{14} + \frac{3}{14}$$

$$P(E) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} = \underline{\underline{42,86\%}}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, bei beliebiger Reihenfolge eine Kugel mit einer Zahl kleiner als 4 und eine Kugel mit einer Zahl größer als 4 zu ziehen, liegt bei $\frac{3}{7}$ bzw. 42,86 %.

Aufgabe 7**1. Ermittlung des zu erwartenden theoretischen Gewinns der SMV pro Spiel**

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad zweimal auf „Elefant“ stehen bleibt:

$$\begin{aligned} P(\text{zweimal Elefant}) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad zweimal auf „Löwe“ stehen bleibt:

$$\begin{aligned} P(\text{zweimal Löwe}) &= \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} \\ &= \frac{4}{64} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad zweimal auf „Strauß“ stehen bleibt:

$$\begin{aligned} P(\text{zweimal Strauß}) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine „Niete“:

$$\begin{aligned} P(\text{Niete}) &= 1 - P(\text{zweimal Elefant}) - P(\text{zweimal Löwe}) - P(\text{zweimal Strauß}) \\ &= 1 - \frac{1}{64} - \frac{4}{64} - \frac{1}{64} \end{aligned}$$

$$P(\text{Niete}) = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$$

Berechnung des zu erwartenden Gewinns pro Spiel bei Schülern:

$$\begin{aligned} \text{Gewinnerwartung}_{\text{Schüler}} &= \text{Erwartung}_{\text{Elefant}} + \text{Erwartung}_{\text{Löwe}} + \text{Erwartung}_{\text{Strauß}} + \text{Erwartung}_{\text{Niete}} \\ &= \frac{1}{64} \cdot (-4,50) + \frac{1}{16} \cdot (-2,50) + \frac{1}{64} \cdot (-1,00) + \frac{29}{32} \cdot 0,50 \end{aligned}$$

$$\text{Gewinnerwartung}_{\text{Schüler}} = \underline{\underline{0,21 \text{ €}}}$$

Berechnung des zu erwartenden Gewinns pro Spiel bei Erwachsenen:

$$\begin{aligned} \text{Gewinnerwartung}_{\text{Erwachsene}} &= \text{Erwartung}_{\text{Elefant}} + \text{Erwartung}_{\text{Löwe}} + \text{Erwartung}_{\text{Strauß}} + \text{Erwartung}_{\text{Niete}} \\ &= \frac{1}{64} \cdot (-4,00) + \frac{1}{16} \cdot (-2,00) + \frac{1}{64} \cdot (-0,50) + \frac{29}{32} \cdot 1,00 \end{aligned}$$

$$\text{Gewinnerwartung}_{\text{Erwachsene}} = \underline{\underline{0,71 \text{ €}}}$$

A: Die SMV kann bei Schülern theoretisch 0,21 € Gewinn pro Spiel erwarten und bei Erwachsenen 0,71 € pro Spiel.

2. Vergleich des zu erwartenden theoretischen Gesamtgewinns mit dem tatsächlichen Gesamtgewinn

Berechnung des zu erwartenden Gesamtgewinns:

	Anzahl Spiele	·	erwarteter Gewinn pro Spiel	=	erwarteter Gesamtbetrag
Schüler	372	·	0,21 €	=	78,12 €
Erwachsene	214	·	0,71 €	=	151,94 €
zu erwartender Gesamtgewinn					<u>230,06 €</u>

Berechnung der Abweichung zwischen zu erwartendem und tatsächlichem Gesamtgewinn:

$$\begin{aligned} \text{Abweichung} &= \text{zu erwartender Gesamtgewinn} - \text{tatsächlicher Gesamtgewinn} \\ &= 230,06 - 217,50 \end{aligned}$$

$$\text{Abweichung} = \underline{\underline{12,56 \text{ €}}}$$

A: Der tatsächliche Gesamtgewinn fällt um 12,56 € geringer aus als der zu erwartende theoretische Gesamtgewinn.

Mögliche Gründe für die festgestellte Abweichung:

Der mit den Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelte zu erwartende Gesamtgewinn von 230,06 € ist ein theoretischer Wert. Im konkreten Fall kann er gar nicht erreicht werden, da der Gesamtgewinn aufgrund der Einsätze und Preise ein Vielfaches von 0,50 € sein muss.

Unabhängig von der konkreten Situation gilt:

- Ein mit den Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelter Wert ist immer ein theoretischer Wert, von dem der jeweils reale Wert jederzeit abweichen kann.
- Das Glücksrad ist nicht ideal im Sinne der Mathematik, sodass durch bauliche Gegebenheiten (Aufteilung der Felder, Gewichtsverteilung, Reibung) die tatsächlichen Ergebniswahrscheinlichkeiten von den errechneten abweichen können.
- Die Spielerinnen und Spieler versuchen, durch geschicktes Drehen für sie günstige Ergebnisse herbeizuführen.